

№1.

11-2

Пусть первое число равно  $x$ , тогда 2-е -  $(1-x)$ . Произведение равно  $x(1-x)$ , то есть  $x-x^2$

Введем ф-ю  $f(x) = x-x^2$  и найдем ее максимальное значение

$$f'(x) = 1-2x$$

$$1-2x = 0$$

$$x = 0,5$$

$$f(0,5) = 0,5 - (0,5)^2 = 0,25$$

$0,25$  - максимальное значение ф-и  $f(x)$ , а значит и произведения  $x-x^2$

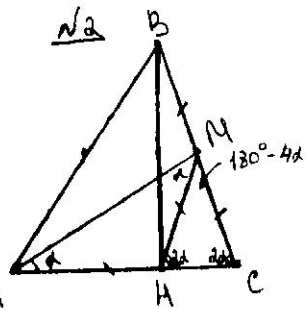
$0,25 < 0,3$ , значит произведение двух чисел, сумма которых равна 1 не может быть больше  $0,3$ .

Ответ: нет.

N	1	2	3	4	5	6	итого
баллы	7	7	7	7	7	0	35

11-2

Олимпиадная работа  
по математике (МЭ)  
уровня 11 класса А  
МАГУ и Региональный центр ИИ  
Именной Софии Андреевны



Дано:  $\triangle ABC$   
 AM - медиана  
 BH - высота  
 AH = 1  
 $2\angle MAC = \angle MCA$   
 Найти: BC

Решение.  
 Проведем MN. MN - медиана в треугольнике BHC, проведенная к гипотенузе  $\Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC = BM = MC$

Пусть  $\angle MAC = \alpha$ , тогда  $\angle MCA = 2\alpha$

Рассмотрим  $\triangle HMC$ :

$MN = MC \Rightarrow \triangle HMC$  - равнобедренный, значит  
 $\angle HMC = \angle MCH = 2\alpha$ ;  $\angle HNC = 180 - 4\alpha$

Уг.  $\triangle AMC$  найдем  $\angle AMH$ :

$$\angle AMC + \angle MCA + \angle CAM = 180^\circ$$

$$\angle AMH + \angle HMC + \angle MCA + \angle CAM = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AMH = 180^\circ - (\angle HMC + \angle MCA + \angle CAM) = \angle AMH = 180^\circ - (180^\circ - 4\alpha + 2\alpha + \alpha) =$$

$$= 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = 180^\circ - 180^\circ + \alpha = \alpha$$

$$\angle AMH = \alpha$$

Рассмотрим  $\triangle AMH$ :

$\angle HAM = \angle AMH = \alpha \Rightarrow \triangle AMH$  равнобедренный  $\Rightarrow AH = HM$

$$\left. \begin{array}{l} AH = HM \\ HM = MC \end{array} \right\} \Rightarrow AH = MC = 1$$

$$BC = 2MC = 2 \times 1 = 2$$

Ответ: BC = 2

№3

Рассмотрим три случая какому может быть a.

1) если  $a = -1$ , то

$$(a+1)x^2 - 4(a+1)(3a+1) > 0$$

$$(-1+1)x^2 - 4(-1+1)(3(-1)+1) > 0$$

$$0 \times x^2 - 4 \cdot 0 \cdot (-2) > 0$$

$$0 > 0$$

Такое неравенство неверно.

2) если  $a > -1$ , то

$$(a+1)x^2 - 4(a+1)(3a+1) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4(3a+1) > 0$$

$$x^2 - 4(3a+1) > 0$$

$$x^2 > 4(3a+1)$$

Верно для любого x при

$$3a+1 < 0$$

$$a < -\frac{1}{3}$$

3) если  $a < -1$ , то

$$(a+1)x^2 - 4(a+1)(3a+1) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4(3a+1) < 0$$

$$x^2 - 4(3a+1) < 0$$

$$x^2 < 4(3a+1)$$

$x^2 \geq 0$   
 $4(3a+1) < 0$

$x^2$  не может быть меньше  $\frac{0}{4(3a+1)}$ , значит решение неравенства не.

Получается,  $(a+1)x^2 - 4(a+1)(3a+1) > 0$  при любом значении x верно, если  $a \in (-1; -\frac{1}{3})$

Ответ:  $a \in (-1; -\frac{1}{3})$

N4

Пусть время работы аппарата  $t$ , тогда масса конечного раствора равна

$$1 + 0,3t - 0,2t = 1 + 0,1t, \text{ где}$$

$0,3t$  - масса подпиточного р-ра;

$0,2t$  - масса выпаренного р-ра.

Масса соли в получаемом р-ре равна

$$1 \times 0,2 + 0,3 \times (0,3t) = 0,2 + 0,09t, \text{ где}$$

$1 \times 0,2$  - масса соли в исходном р-ре

$0,3 \times (0,3t)$  - масса соли в подпиточном р-ре

В получаемом р-ре 40% соли, то есть

$$0,4(1 + 0,1t).$$

Приравняем полученные уравнения:

$$0,2 + 0,09t = 0,4(1 + 0,1t)$$

$$0,2 + 0,09t = 0,4 + 0,04t$$

$$0,09t - 0,04t = 0,4 - 0,2$$

$$0,05t = 0,2$$

$$t = 4 \text{ (ч)}$$

Найдем массу полученного р-ра:

$$1 + 0,1t = 1 + 0,1 \times 4 = 1 + 0,4 = 1,4 \text{ (кг)}$$

Ответ: 1,4 кг.

N5

У нас есть натуральные числа от 1 до 25, т.е. всего 25 чисел. Рассмотрим пары чисел, сумма которых равна 25 или 26

$$\begin{array}{r} 26 \\ 25 + 1 \\ 24 + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 1 + 24 \\ 2 + 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 + 11 \\ 14 + 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 + 14 \\ 12 + 13 \end{array}$$

Заметим, что эти пары чисел можно записать в виде последовательности, где каждая пара соседних чисел в сумме дает 25 или 26.

$$\begin{array}{cccccccc} 25 & 1 & 24 & 2 & 23 & \dots & 11 & 14 & 12 & 13 \\ \hline & 26 & & & & & & 26 & & 25 \end{array}$$

Чтобы у нас не получилось суммы чисел, равные 25 и 26 нужно у этой последовательности выбрать 13 чисел так, чтобы среди выбранных чисел не было соседних.

Выбрав у этой последовательности каждое второе число и получим нужные нам 13 чисел:

$$25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13$$

Этот список является единственным.

Ответ: 1 способ.